**1.7. Induksi Matematika**

Induksi matematika sering digunakan kebenaran suatu rumus-rumus matematika yang berlaku untuk semua bilangan Asli (**A**).Bukti dengan cara ini didasarkan rumus.

***Teorema. (Prinsip Induksi Matematika)***

Misalkan Pn adalah suatu pernyataan tentang bilangan bulat positif n. Jika kedua syarat berikut dipenuhi:

1). P1 benar,

2). Jika k bilangan bulat positif sebarang sehingga Pk benar, maka Pk+1 juga benar, maka Pn benar ***untuk semua*** bilangan Asli n

***Bukti.*** Andaikan Syarat 1). dan 2). dipenuhi, tetapi kesimpulan tidak dipenuhi. Ini berarti Pn tidak berlaku untuk setiap bilangan asli n. Misalkan n + 1 adalah bilangan bulat positif terkecil sehingga Pn tidak benar, yaitu P1 , P2 , ..., PN benar, tetapi untuk PN+1 tidak benar .

Menurut syarat 1). N ≥ 1.

Menurut syarat 2). karena PN benar, maka PN+1 benar pula hal ini bertentangan dengan hipotesis bahwa PN+1 tidak benar.

Karena itu haruslah Pn benar untuk setiap n∈ **A.**

**Contoh 1.*****Buktikan***  1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n2

**Bukti.** P : 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n2

Untuk n = 1, maka 2.1 – 1 = 12

1 = 1

Karena untuk n = 1, yaitu P1 benar.

maka diasumsikan benar untuk n = k yaitu Pk , sehingga

1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) = k2

Selanjutnya, ditunjukkan benar untuk n = k + 1 , yaitu

1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) + (2(k+1) - 1) = (k + 1)2

Diketahui bahwa 1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) = k2 , sehingga

ruas kiri menjadi

1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) + (2(k+1) - 1) = k2 + (2(k+1) - 1)

= k2 + 2k + 1

= (k + 1)2

dengan demikian ruas kiri = ruas kanan, yaitu

(k + 1)2 = (k + 1)2

Jadi, Pn+1 benar.

Karena Pn+1 benar, maka Pn benar untuk setiap n∈ **A.**

**Contoh 2. *Buktikan*** 12 + 22 + ... + n2 = 1/6 n(n + 1)(2n + 1)

**Bukti**. P :12 + 22 + ... + n2 = 1/6 n(n + 1)(2n + 1)

Untuk n = 1, maka 12 = 1/6 x 1(1 + 1)(2 x 1 + 1)

1 = 1/6 (2)(3)

1 = 1

Karena P1 benar, maka diasumsikan Pk juga benar, yaitu

12 + 22 + ... + k2 = 1/6 k(k + 1)(2k + 1)

Selanjutnya, ditunjukkan Pk+1 benar, yaitu

12 + 22 + ... + k2 + (k + 1)2 = 1/6 (k+1)((k+1) + 1)(2(k +1 ) + 1)

atau

12 + 22 + ... + k2 + (k + 1)2 = 1/6 (k+1)(k + 2)(2k + 3)

Diketahui 12 + 22 + ... + k2 = 1/6 k(k + 1)(2k + 1), maka

ruas kiri menjadi

**= 1/6 k(k + 1)(2k + 1) + (k + 1)2**

**= 1/6 k(k + 1)(2k + 1) + 1 (k + 1)2**

**= 1/6 k(k + 1)(2k + 1) + 1/6. 6(k + 1)2**

**= 1/6 [k(k + 1)(2k + 1) + 6(k + 1)2 ]**

**= 1/6 (k + 1)[(2k2 + k) + 6(k + 1)]**

**= 1/6(k + 1)(2k2 + 7k + 6)**

**= 1/6 (k + 1)[(k + 2)(2k + 3)]**

dengan demikian ruas kiri = ruas kanan, yaitu

1/6(k + 1)[(k + 2)(2k + 3)] = 1/6(k + 1)[(k + 2)(2k + 3)]

Jadi, Pn+1 benar.

Karena Pn+1 benar, maka Pn benar untuk setiap n ∈ **A.**

**Contoh 3.** Jika n! = n(n-1)(n-2)... 1

0! = 1

***Buktikan*** bahwa n! > 2n untuk n ≥ 4

**Bukti**. Pn : n! > 2n untuk n ≥ 4

Untuk n = 4, maka 4! > 24

4.3.2.1 = 24 > 16

Pernyataan benar untuk n = 4, diasumsikan benar untuk n = k yaitu Pk untuk

k ≥ 4 atau

k! > 2k untuk k ≥ 4

Selanjutnya ditunjukkan benar untuk n = k + 1, yaitu

(k + 1)! > 2k+1 untuk k ≥ 4

ruas kiri:

(k + 1)! dapat ditulis (k + 1)(k!)

karena k! > 2 k untuk k ≥ 4, maka

(k + 1)! > (k + 1) 2k \*)

ruas kanan:

2k+1 = 2k . 21 \*\*)

berdasar fakta (k + 1) > 2 [k ≥ 4)

Jadi, (k + 1)! > 2k+1

Karena Pk+1 benar, maka Pn benar untuk n ≥ 4 dan n ∈ **A.**

**Contoh 4.** Jika  = 2.1 + 2.2 + 2.3 + ... + 2.n

***Buktikan***  = n (n + 1)

**Bukti.** Pn :  = 2.1 + 2.2 + 2.3 + ... + 2.n

Untuk n = 1, maka 2 = 1.(1 + 1)

= 2

Karena untuk n = 1 dan P1 benar, maka diasumsikan Pk benar, yaitu

 = k (k + 1)

Selanjutnya ditunjukkan, bahwa benar juga untuk n = k + 1, yaitu

 = (k + 1)((k+1) + 1)

= (k + 1)(k + 2)

Sedangkan diketahui bahwa  = k (k + 1), sehingga

ruas kiri menjadi

k(k + 1) + (2(k + 1) = (k + 1)(k + 2)

ternyata ruas kiri sama dengan ruas kanan, sehingga P n+1 benar.

Jadi, Pn berlaku untuk setiap n ∈ **A.**

**L A T I H A N**

Dengan menggunakan induksi matematika selesaikan soal-soal berikut, jika n ∈ **A**

1. Buktikan  = 

2. Buktikan 

3. Buktikan 

4. Buktikan 

5. Buktikan 

6. Buktikan 1.3.5 + 2.4.6 + 3.5.7… + n(n+2)(n+4) = ¼ n(n+1)(n+4)(n+5)

7. Buktikan : 2 + 22 + 23 + ... + 2n = 2 (2n - 1)

8. Buktikan : 1.5 + 2.52 + 3.53 + ... + n.5n = 

9. Buktikan : n5 - n habis dibagi oleh 30.

10. Buktikan : 34n - 1 habis dibagi oleh 80.